Monatsaufgabe Oktober – Lösung

1) Der Graph geht durch den Punkt $P(0|9)$ $\Rightarrow$ $f_a(0) = 9$ (1)

$$9 = \frac{a\cdot e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{a}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{36 = a}} \quad (1) \qquad \boxed{2}$$

2) f_a ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f_a(-x) = f_a(x)$ (1)

$$f_a(-x) = \frac{a\cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{a e^{-x}\cdot e^{2x}}{(1+e^{-x})^2\cdot e^{2x}} \overset{(1)}{=} \frac{ae^x}{(e^x+1)^2} = \frac{ae^x}{(1+e^x)^2} = f_a(x) \quad (1) \qquad \boxed{3}$$

$\Rightarrow$ achsensymmetrisch für alle $a \neq 0$

3) Setze $f_{81}(x) = g(x)$ und löse nach x auf (1)

$$\frac{81 e^x}{(1+e^{+x})^2} = e^x \quad | \cdot (1+e^{+x})^2$$

$$81 e^x = e^x \cdot (1+e^{+x})^2 \quad | : e^x \text{, da } e^x \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$81 = (1+e^x)^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\pm 9 = 1+e^x \qquad -9 \text{ ist keine Lösung, da } e^x > 0 \text{ und } 1 > 0 \Rightarrow 1+e^x > 0\,!$$

$$9 = 1+e^x$$

$$8 = e^x$$

$$\underline{x = \ln(8)} \quad (3) \qquad \boxed{5}$$

Setze in g ein: $g(\ln(8)) = e^{\ln(8)} \underline{\underline{= 8}}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $S(\ln(8)|8)$ (1)

4)
$$f_a'(x) = \frac{ae^x\cdot(1+e^x)^2 - ae^x\cdot 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^2} \cdot \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(1+e^x)}(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f_a(x)}} \qquad \boxed{4}$$

5)
$$f_a''(x) = \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^2} \cdot f_a(x) + \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f_a'(x)$$

$$= \frac{-e^x \cancel{-e^{2x}} - e^x \cancel{+e^{2x}}}{(1+e^x)^2} \cdot f_a(x) + \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 \cdot f_a(x)$$

$$= \frac{-2e^x + 1 - 2e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} \cdot f_a(x)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-4e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} \cdot f_a(x)}} \quad (3)$$

$$f_a'''(x) = \frac{(-4+2e^{2x})(1+e^x)^{\cancel{2}} - (1-4e^x+e^{2x})\cdot 2\cancel{(1+e^x)}\cdot e^x}{(1+e^x)^{\cancel{4}\,3}} \cdot f_a(x) + \frac{1-4e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} \cdot f_a'(x)$$

$$= \frac{\cancel{-4} - 4e^x + 2e^{2x} + 2e^{3x} - 2e^x + 8e^{2x} - 2e^{3x}}{(1+e^x)^3} \cdot f_a(x) + \frac{1-4e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} \cdot \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f_a(x)$$

$$= \frac{-4 - 6e^x + 10e^{2x} + 1 - 4e^x + e^{2x} - e^x + 4e^{2x} - e^{3x}}{(1+e^x)^3} \cdot f_a(x)$$

$$= \frac{-3 - 11e^x + 15e^{2x}}{(1+e^x)^3} \cdot f_a(x) \quad (3)$$

Extrema: notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$
hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ 0,5

$$0 = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f_a(x) \qquad f_a(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$0 = \frac{1-e^x}{1+e^x} \qquad | \cdot (1+e^x)$$

$$0 = 1 - e^x \qquad | + e^x$$
$$e^x = 1 \qquad | \ln$$
$$\underline{x = 0}$$ 2

$$f_a''(0) = \frac{1-4+1}{4} \cdot f_a(0)$$

$$= -0{,}5 \cdot \frac{a}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}a}} \neq 0 \text{ für alle } a \neq 0$$

$\Rightarrow$ HP für $a > 0$, da $f_a''(0) < 0$ bzw.
TP für $a < 0$, da $f_a''(0) > 0$ für $a < 0$. 1

Extremum: $E_a(0 \mid \frac{a}{4})$. 0,5

Wendepunkte: notw. Bed.: $f_a''(x) = 0$
hinr. Bed.: $f_a'''(x) \neq 0 \wedge f_a''(x) = 0$ 0,5

$$0 = \frac{1-4e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} \cdot f_a(x) \qquad f_a(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$0 = \frac{1-4e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} \qquad | \cdot (1+e^x)^2$$

$$0 = 1 - 4e^x + e^{2x} \qquad | \ z = e^x \ \text{(Substitution)}$$
$$0 = z^2 - 4z + 1$$
$$z_{1|2} = 2 \pm \sqrt{4-1}$$
$$\underline{z_1 = 2 + \sqrt{3}}$$
$$\underline{z_2 = 2 - \sqrt{3}}$$ 2

$$e^x = 2 + \sqrt{3} \quad | \ln \qquad\qquad e^x = 2 - \sqrt{3}$$
$$x_1 = \ln(2+\sqrt{3}) \approx \underline{\underline{1{,}317}} \qquad x_2 = \ln(2-\sqrt{3}) \approx \underline{\underline{-1{,}317}}$$ 1

$$\cancel{x^2 = 2+\sqrt{3}}$$
$$\cancel{x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1{,}319}$$
$$\cancel{x_2 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx -1{,}319}$$

$$\cancel{f_a'''(x) \neq} \quad f_a'''(\ln(2+\sqrt{3})) = \frac{-3 - 11(2+\sqrt{3}) + 15 \cdot (2+\sqrt{3})^2}{(1+2+\sqrt{3})^2} \cdot f_a(\ln(2+\sqrt{3}))$$

$$= \underbrace{\frac{164{,}87}{(1+2+\sqrt{3})^2}}_{>0} \cdot \underbrace{f_a(\ln(2+\sqrt{3}))}_{\neq 0}$$ 1

$\Rightarrow$ Wendepunkt

$$f_a(\ln(2+\sqrt{3})) = \frac{a \cdot (2+\sqrt{3})}{(1+2+\sqrt{3})^2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}a}} \quad \Rightarrow W_1\left(\ln(2+\sqrt{3}) \,\middle|\, \frac{1}{6}a\right)$$

$$f_a'''(\ln(2-\sqrt{3})) = \frac{-3 - 11(2-\sqrt{3}) + 15(2-\sqrt{3})^2}{(1+2-\sqrt{3})^2} \cdot f_a(\ln(2-\sqrt{3}))$$

$$= \underbrace{\frac{-4{,}87}{(3-\sqrt{3})^2}}_{<0} \cdot \underbrace{f_a(\ln(2-\sqrt{3}))}_{\neq 0}$$ 1

$\Rightarrow$ Wendepunkt

$$f_a(\ln(2-\sqrt{3})) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{(1+2-\sqrt{3})^2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}a}} \quad \Rightarrow W_2\left(\ln(2-\sqrt{3}) \,\middle|\, \frac{1}{6}a\right)$$ 0,5

6) $f_a(x) = \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}$, $F_a(x) = \int \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

Substitution: $1+e^x = z$ (1)

=> Differential: $z' = \frac{dz}{dx} = e^x$ => $dx = \frac{dz}{dx}$ (1)

$\int f_a(x)\,dx = \int \frac{a}{z^2}\,dz = -\frac{a}{z} + C$, $C \in \mathbb{R}$ (1)

Rücksubstitution: $z = 1+e^x$

=> $F_a(x) = \int \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}\,dx = -\frac{a}{1+e^x} + C$, $C \in \mathbb{R}$ (1) *

$\boxed{6}$

7) $A = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}\,dx\right| = 2\cdot\left|\int_0^{\infty} \frac{ae^x}{(1+e^x)^2}\,dx\right|$

$= 2\cdot|a|\cdot\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

$= 2\cdot|a|\cdot\lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^t$

$= 2\cdot|a|\cdot\lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{1+e^t} + \frac{1}{2}\right)$

$= 2\cdot|a|\cdot\frac{1}{2} = |a|$

$\boxed{4}$

8) Gesucht ist der Wendepunkt von $F(t)$, da $F'(t)$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmelpilzes beschreibt. Das Maximum von $F'(t)$ ist also der WP von F. (1)

$F'(t) = \frac{36e^t\cdot(1+e^t) - 36e^t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}$

$= \frac{36e^t}{(1+e^t)^2} = f_{36}(t)$ (1)

Nach Aufgabenteil 5) folgt, dass $f_{36}(t)$ bei $t=0$ das Maximum hat. (1) $\boxed{3}$

9) Ebenfalls nach Aufgabenteil 5) folgt, dass

HP bei $E_a(0|\frac{a}{4})$ und in diesem Fall also bei $E_{36}(0|9)$

Daher beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $9\ \frac{cm^2}{Tag}$. $\boxed{2}$

10) $F'(t) = \frac{36e^t}{(1+e^t)^2}$

$k\cdot F(t)\cdot[G - F(t)] = k\cdot\frac{36e^t}{1+e^t}\cdot\left[G - \frac{36e^t}{1+e^t}\right]$

$= \frac{36e^t}{1+e^t}\cdot k\cdot\frac{G(1+e^t) - 36e^t}{1+e^t}$

$= \frac{36e^t}{(1+e^t)^2}\left(k(G + G\cdot e^t - 36e^t)\right)$

$= F'(t)\cdot\underbrace{\left(\underset{\frac{1}{36}}{k}\cdot(\underset{36}{G} + \underbrace{(G-36)\cdot e^t}_{0})\right)}_{1}$ (3) $\boxed{3}$

Wählt man $G=36$ und $k=\frac{1}{36}$, so folgt:

also die Differentialgleichung

$9 = \int_0^{\ln(4)} \frac{ae^x}{(1+x^x)^2}\,dx = \left[-\frac{a}{1+e^x}\right]_0^{\ln(4)} = -\frac{a}{5} + \frac{a}{2} = \frac{3}{10}a \Leftrightarrow \underline{a = 30}$ (2)