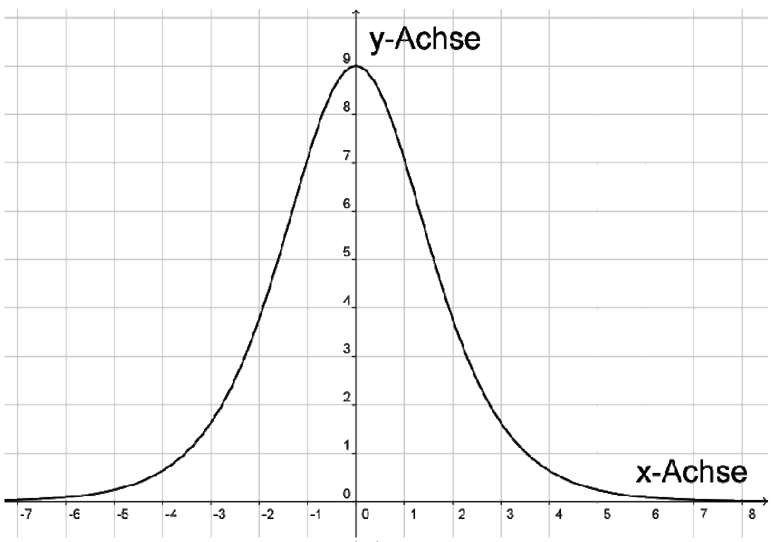
Wiederholungen zur Analysis:

Gegeben ist die Funktion

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$$

für $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$



1. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a. Bestimmen den zugehörigen Parameter a.
2. Zeigen Sie, dass für alle Werte $a \neq 0$ der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
3. Bestimmen Sie rechnerisch die gemeinsamen Schnittpunkte des Graphen f_{81} mit dem Graphen von $g(x) = e^x$.
4. Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt: $f_a{}'(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f_a(x)$
5. Berechnen Sie die relativen Extrema und die Wendepunkte von f_a.
6. Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f_a(x)$ und bestimmen Sie a so, dass $\int_0^{\ln(4)} f_a(x)dx = 9$ gilt.

   [*Kontrollergebnis:* $F_a(x) = \frac{-a}{1+e^x}$] *Tipp: Substitution!*
7. Der Graph von f_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche aber einen endlichen Flächeninhalt hat.

Durch $F(t) = \frac{36e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und F(t) in cm² gemessen.

8. Ermitteln sie den Zeitpunkt, an dem sich der Schimmelpilz am schnellsten ausbreitet.
9. Bestimmen Sie die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit.
10. Weisen Sie nach, dass F eine Differentialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$$

erfüllt.